



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 1:

- (1) Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ com autovalores diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Então, $\exists$ uma matriz P invertível e uma matriz J , tal que
- Forma canônica de Jordan

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

Onde $J(\lambda_i)$ são chamados segmentos de Jordan, e são matrizes diagonais por blocos $J_\ell(\lambda_i)$, com $\dim(W(A - \lambda_i I))$ de blocos da forma

$$J_\ell(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Sejam $r_\ell = \dim(R(A - \lambda_i I)^\ell)$, então, o bloco de maior tamanho é de dimensões $\text{índice}(\lambda_i)$, onde o índice de λ_i é o menor ℓ tal que $r_\ell = r_{\ell+1}$.

~~As dimensões~~

A quantidade de blocos no segmento de dimensões $m \times m$ é calculado pela fórmula

~~$$r_m - r_{m+1} + r_{m-1} - r_m$$~~

$$r_m = r_{m+1} + r_{m-1} - 2r_m.$$

A matriz J é única no sentido de a quantidade de segmentos de Jordan, a quantidade de blocos em cada segmento e suas dimensões, não variam. Não entanto, a matriz P não é única.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 1:

(2)

$$\det(tI - A) = 0$$

$\Downarrow$

$$t^5 + 2at^3 + a^2t = 0$$

$\Downarrow$

$$t(t^4 + 2at^2 + a^2) = 0$$

$\Downarrow$

$$t(t^2 + a)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$t(t - \sqrt{a})^2(t + \sqrt{a})^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ é uma raiz com multiplicidade algébrica } 1, \\ t = \pm\sqrt{a} \text{ são raízes com multiplicidade algébrica } 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(N(A - 0I)) = 1 \\ \dim(N(A \pm \sqrt{a}I)) \leq 2 \end{cases}$$

Logo, ~~a~~ a matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J(0) & 0 & 0 \\ 0 & J(\sqrt{a}) & 0 \\ 0 & 0 & J(-\sqrt{a}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

tem só um bloco no segmento $J(0)$, que é de dimensão 1 por ser uma raiz simples.

Agora, os ~~blocos~~ segmentos $J(\pm\sqrt{a})$ podem ter 1 ou 2 blocos, dependendo das $\dim(N(A \pm \sqrt{a}I))$ (multiplicidade geométrica).

$\therefore$, eles podem ter as formas

$$J(\pm\sqrt{a}) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{a} \end{pmatrix}, \text{ ou } J(\pm\sqrt{a}) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

obtendo um total de 4 formas possíveis para (1). Fazendo as permutações dos segmentos, temos 12 formas canônicas possíveis.



Questão 12

(3)

~~Pelo~~ Pelo $\det(tI - B) = (t-1)^n$, o único autovalor de B é $\lambda=1$.

Mostremos que ~~os autovalores de~~ B^{-1} também só tem autovalor $\lambda=1$.

Seja λ um autovalor de B^{-1} , com autovetores associados v . Usando que

$$B B^{-1} = I, \text{ temos}$$

$$B B^{-1} v = I v$$

$$B \lambda v = v$$

$\lambda B v = v \Rightarrow v$ é autovetor de B com autovalor associado $\frac{1}{\lambda}$.

Mas B só tem autovalor ~~1~~ $\Rightarrow$ o autovalor λ de B^{-1} é $\lambda=1$ também.

Além de provar que $\lambda=1$ é o único autovalor de B^{-1} , provamos que todo autovetor de B^{-1} também é autovetor de B .

Mostremos agora que todo autovetor de B também é um autovetor de B^{-1} .

Seja v autovetor de B , usando

$$B^{-1} B = I, \text{ temos}$$

$$B^{-1} B v = I v$$

$$B^{-1} v = v \Rightarrow v \text{ é autovetor de } B^{-1}.$$

Então, resulta que B e B^{-1} têm os mesmos autovalores e autovetores associados, com autovalor $\lambda=1$.

~~Além disso, o polinômio característico de B^{-1} é $(t-1)^n$ também.~~

~~Como as ma~~

~~Logo, B e B^{-1} tem $\dim(B-I) = n$, $\dim(N(B-I)) = \dim(N(B^{-1}-I)) = 0$ (pois que não tem autovalor 1)~~



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Logo, $N(B-I) = N(B^{-1}-I) \Rightarrow R(B-I) = R(B^{-1}-I) \Rightarrow R((B-I)^K) = R((B^{-1}-I)^K)$

$\Rightarrow$ têm a mesma forma canônica de Jordan.

$\therefore \exists P, Q:$

$$\left. \begin{array}{l} P^{-1}BP = J \\ Q^{-1}B^{-1}Q = J \end{array} \right\} \Rightarrow P^{-1}BP = Q^{-1}B^{-1}Q \Rightarrow B = PQ^{-1}B^{-1}QP^{-1} \\ = (QP^{-1})^{-1}B^{-1}(QP^{-1})$$

$\Rightarrow B$ e B^{-1} são similares

Questão 2:

(1) só lembro de uma versão com o rotacional.
(estudei)

Teorema: Seja S uma superfície conexa, orientada e suave por partes, com fronteira formada por uma curva C , fechada, simples, orientada positivamente e suave por partes. Para todo campo vetorial F em $\mathbb{R}^3$, com derivadas parciais contínuas numa região aberta que contém a S , temos que

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot} F \cdot dS, \text{ onde } \text{rot} F = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}, \text{ com } F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

(2) não consigo fazer por ter incompleto o item (1).

(3)



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 3

(1) Sejam as variáveis aleatórias $\{x_1, \dots, x_n\}$ independentes e igualmente distribuídas, com ~~mediana~~ $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 > 0$ finitos. Então,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{n} \sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

$$(3) E[x_j] = \frac{1}{2} j^{-1/2} - \frac{1}{2} j^{-1/2} = 0$$

$$E[x_j^2] = \frac{1}{2} j^{-1} + \frac{1}{2} j^{-1} = j^{-1}$$

$$\text{Var}[x_j] = E[x_j^2] - (E[x_j])^2 = j^{-1}$$

$$Y_j = j^{1/2} x_j$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

(A) $X_j = j^{-1/2} Y_j$